**КНЗ «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради»**

**Вказівки та відповіді до ІІ (районного) етапу**

**Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**2017-2018 навчальний рік**

**6 клас**

1. Знайдіть ділене, якщо відомо, що дільник дорівнює найменшому кратному чисел 56, 72 і 96, частка − найбільшому дільнику чисел 3051 і 2682, а остача від ділення становить 1856.

***Відповідь:*** 20000.

***Розв’язання*:** НСК (56; 72; 96) = 25 ⋅ 32 ⋅ 7 = 2016 – дільник, НСД (3051; 2682) = 32 = 9 – частка, 2016 ⋅ 9 + 1856 = 20000 – ділене.

1. У родині 4 особи. Якщо Оленці підвищити стипендію удвічі, то загальний прибуток усієї родини зросте на 5%, якщо замість цього бабусі підвищити пенсію удвічі, то – на 15%, а якщо ж підвищити удвічі зарплату мамі, то – на 25%. На скільки відсотків зросте прибуток усієї родини, якщо підвищити удвічі зарплату татові?

***Відповідь:*** 55%.

***Розв’язання*:** Якщо Оленці подвоять стипендию, сімейний прибуток зросте на розмір цієї стипендії. Отже, Оленчина стипендия становить 5% загального прибутку. Аналогично, бабусина пенсія становить 15%, а зарплата мами – 25%. Частина, що залишається, 100%–5%–15%–25%=55%, припадає на татову зарплату. Значить, якщо йому подвоять зарплату, прибуток всієї сім’ї зросте на 55%.

1. До числа 10 справа та зліва приписали по одній цифрі так, щоб отримане число було кратне 36. Знайдіть це число.

***Відповідь:*** 8100, 4104, 9108.

***Розв’язання*:** За умовою задачі  де   - натуральне число. Тоді  або  або  Оскільки число  ділиться на 9, то  або  Якщо підставити  , у відповідні формули, отримаємо відповідь 8100, 4104, 9108.

1. Якщо деяке число помножити на 5, від добутку відняти його третину, остачу поділити на 14 і додати до цього послідовно **, ** і ** від початкового числа, то отримаємо 68. Яке число було спочатку?

***Відповідь:*** 68.

***Розв’язання*:** нехай число – ,складаємо рівняння,  – шукане число.

1. Василько придумав правило, за яким виписував у рядок числа. За його задумом першими були числа: 5, 12, 26, 47, … . Якими, на вашу думку, мають бути два наступні числа? Відповідь обґрунтуйте.

***Відповідь:*** 75, 110.

***Розв’язання:*** Очевидна закономірність:

1-ше число: 5+7·0=5;

2-ге число: 5+7·1=12;

3-тє число: 12+7·2=26;

1-ше число: 26+7·3=47;

1-ше число: 47+7·4=75;

1-ше число: 75+7·5=110.

Отже, наступними двома числами послідовності повинні бути 75 та 110.

**7 клас**

1. Ціна м’яча у двох магазинах однакова. Ціну м’яча у першому магазині спочатку зменшили на 10%, а потім збільшили на 10%. Ціну м’яча у другому магазині спочатку збільшили на 10%, а потім зменшили на 10%. Порівняйте остаточні ціни на м’яч у цих магазинах.

***Відповідь:***ціна однакова.

***Вказівка.*** Позначимо початкову ціну м’яча через *а*. В першому і другому магазинах остаточна ціна становить 0,99*а*.

1. У школі відбулися три олімпіади. З’язувалось, що в кожній з них брали участь по 50 школярів. При цьому 60 учнів приходили тільки на одну олімпіаду, а 30 учнів – на дві. Скільки учнів брали участь в усіх олімпіадах?

***Відповідь:*** 10 учнів.

***Вказівка.*** Нехай *х* учнів брали участь в усіх трьох олімпіадах. Тоді ті, хто приходили лише на одну олімпіаду, писали рівно 60 робіт, ті, хто приходив на дві олімпіади, писали 30·2=60 робіт, а ті, хто на три – писали 3*х* робіт. Всього було написано 50·3=150 робіт. Маємо рівняння:

60+60+3 *х=*150, *х=10.*

1. Відношення двоцифрового числа до числа, що є сумою його цифр, дорівнює 9. Знайдіть це двоцифрове число.

***Відповідь:***81.

***Вказівка.*** , , . Враховуючи, що , , отримаємо 81.

1. У кімнаті є 4 годинники, які показують неправильний час. Перший годинник помиляється на 2 хвилини, другий годинник – на 3 хвилини, третій ­ на 4 хвилини, четвертий – на 5 хвилин. У певний момент часу ці годинники показували час: 14:54, 14:57, 15:02, 15:03 (у довільному порядку). Який точний час мали б показувати годинники?

***Відповідь:***14:59.

***Вказівка.*** Різниця 15 год 3 хв і 14 год 54 хв дорівнює 9 хв. Тобто один з цих годинників показує час із запізненням на 4 хв, а інший спішить на 5 хв або один з цих годинників показує час із запізненням на 5 хв, а інший спішить на 4 хв. Тоді точний час може бути або 14:59 або 14:58. Враховуючи показники інших двох годинників, маємо точний час 14:59.

1. Доведіть, що існує таке число, яке при множенні на 99 дає число, десятковий запис якого містить тільки одиниці.

***Вказівка.*** 99·*х* = 11…11, число 11…11 ділиться на 11, тобто містить 2*п* одиниць, тоді 9·*х* = 10101…01, число 10101…01 має *п* одиниць, отже *п* – кратне 9. Нехай *п* = 9. Тоді *х* = 1122334455667789.

**8 клас**

1. Яке з чисел більше:  чи ?

***Відповідь:*** Перше більше за друге.

***Вказівка.***

 а 

1. Розв’яжіть рівняння  в цілих числах.

***Відповідь:*** (2; – 2), (0; – 2).

*Вказівка.* 

1. На стороні *АВ* трикутника *АВС* позначено деяку точку *М*. *МР* – бісектриса трикутника *АМС*, *МН* – висота трикутника *ВМС*, ∠*РМН* = 90°. *НС* = 5 см. Знайдіть *ВС*.

***Відповідь:*** 10 см.

*Вказівка.* Бісектриси суміжних кутів *АМС* і *СМВ* перпендикулярні. *МН* – бісектриса ∠ *ВМС*. Трикутник *ВМС* рівнобедрений.

1. Доведіть, що існує таке число, яке при множенні на 999 дає число, десятковий запис якого містить тільки одиниці.

***Вказівка.*** 999·*х* = 111…111, число 111…111 ділиться на 111, тобто містить 3*п* одиниць, тоді 9·*х* = 1001001…001, число 1001001…001 має *п* одиниць, отже *п* – кратне 9. Нехай *п* = 9. Тоді *х* = 111222333444555666777889.

1. На дошці розміром 4х4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати тільки один раз. Програє той, після чийого ходу утворюється квадрат 2х2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто ходить першим чи його суперник? Відповідь обґрунтуйте.

***Відповідь:*** Другий гравець**.**

***Вказівка.*** Виграш може забезпечити собі той, хто ходить другим. Після ходу першого гравця в клітинку з деяким номером він має зафарбувати іншу клітинку з таким же номером (див. табл.).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |

**9 клас**

1. До резервуара постачають воду по п’яти трубах. Перша труба наповнює резервуар за 40 хв; друга, третя і четверта, працюючи разом, - за 15 хв; друга, третя і п’ята – за 30 хв. За який час наповнять резервуар усі п’ять труб, працюючи разом?

***Відповідь:*** 10 хв.

1. Скільки розв’язків має рівняння  ( – найбільше ціле число, яке не перевищує )?

***Відповідь:*** 3 розв’язки.

***Вказівка.*** Побудуйте графіки  і .

1. У квадраті зі стороною 1 позначили 51 точку. Доведіть, що деякі з трьох із цих точок можна накрити квадратом зі стороною 0,2.

*Вказівка.* Розіб’ємо даний квадрат на 25 менших квадратів зі стороною 0,2. Оскільки 51 = 2 · 25 + 1, то принаймні в один з менших квадратів попаде принаймні три точки.

1. У трапеції *ABCD* менша основа *BС* дорівнює бічним сторонам, *СН*  – висота. *Р* – основа перпендикуляра, який опущено з точки *Н* на пряму *АС*. Знайдіть відношення, в якому відрізок *РН* поділяє діагональ *BD*.

***Відповідь****:* 1 : 1.

***Вказівка.*** *РH* перетинає *ВD* у точці *N*. Чотирикутник *NHDC* є вписаним, тоді

* + *СND* = 90°. *СN* – висота рівнобедреного трикутника *BCD.*
1. Позначимо символами  і  відповідно найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне натуральних чисел . Доведіть, що .

***Вказівка.***Запишемо рівність у вигляді: [*a*,*b*,*c*]2(*a*,*b*)(*b*,*c*)(*c*,*a*)=(*a*,*b*,*c*)2[*a*,*b*][*b*,*c*][*c*,*a*]. Кожне натуральне число розкладається в добуток простих чисел, і цей розклад єдиний. Тому достатньо показати, що в розкладі обох частин рівності в добуток простих чисел, кожне просте число *p* зустрічається в однаковому степені. Справді, нехай в розкладі числа *a* в добуток простих чисел число *p* зустрічається в степені , в розкладі числа *b* – в степені , в розкладі числа *с* – в степені , можемо вважати, що . Очевидно, до розкладу числа (*a*,*b*,*с*) в добуток простих чисел число *p* входить в найменшому з тих степенів, в яких воно входить до розкладів чисел *a*,*b*,*с*, а до розкладу числа [*a*,*b*,*с*] – в найбільшому з цих степенів. Тому до розкладу лівої частини рівності [*a*,*b*,*c*]2(*a*,*b*)(*b*,*c*)(*c*,*a*)=(*a*,*b*,*c*)2[*a*,*b*][*b*,*c*][*c*,*a*] число *p* входить в степені , а до розкладу правої частини – в степені .

**10 клас**

**1.**  і  – корені квадратного рівняння . Доведіть, що .

***Вказівка.*** За теоремою Вієта  + = ,  · = .

( + )*а* = ,  · *а* = *с*.

**2.** Доведіть нерівність .

***Вказівка.*** 

**3.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких  задовольняють нерівність .

***Відповідь:***



**4.** Розв’яжіть рівняння ****.

***Відповідь:*** 2.

***Вказівка.* ,** , звідси,.

**5.** В трапеції *ABCD* менша основа *BС* дорівнює бічним сторонам, *СН*  – висота. *Р* – основа перпендикуляра, який опущено з точки *Н* на пряму *АС*. Знайдіть відношення, в якому діагональ *BD* поділяє відрізок *РН*.

***Відповідь****:* 1 : 1.

***Вказівка.*** *РH* перетинає *ВD* у точці *N*. Чотирикутник *NHDC* є вписаним, тоді

∠ *СND* = 90°. *СN* – висота рівнобедреного трикутника *BCD.*

**11 клас**

1.  і  – корені квадратного рівняння . Доведіть, що .

***Вказівка.*** За теоремою Вієта  + = ,  · = .

( + )*а* = ,  · *а* = *с*.

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел , які задовольняють нерівність 

***Відповідь.*** 

***Вказівка.*** Запишемо вираз, який стоїть у лівій частині рівності, так:  Оскільки , а , то  Тому рівність  може виконуватися лише за умови 

1. Знайдіть всі такі функції, які при всіх дійсних *х*≠0 задовольняють рівність .

***Відповідь:***.

***Вказівка.*** Замінивши *х* на , отримуємо . З системи отримуємо .

1. *AА*1, *ВВ*1 – висоти трикутника  *ABC*. Точки *C* і *D* симетричні відносно середини відрізка *А*1*В*1. Точка *D* належить стороні *АВ*. Доведіть, що *АВ* – дотична до кола, описаного навколо трикутника *А*1*В*1*D*.

***Вказівка.*** *В*1*DА*1*С* – паралелограм. Потрібно показати, що ∠ *АDВ*1 =∠ *В*1*А*1*D*. Це слідує з того, що ∠ *АDВ*1 =∠ *СВА*= ∠ *А*1*В*1*С* = ∠ *В*1*А*1*D*.

1. Знайдіть найбільше значення параметра , при якому нерівність  виконується для всіх дійсних значень .

***Відповідь****:* 4.

***Вказівка.*** При = 0 нерівність виконується для всіх дійсних значень . При  нерівність виконується для довільних додатних . Нехай . Оскільки , то дану нерівність можна подати у вигляді , тому  і 