**Відповіді та вказівки до розв’язків завдань ІІ (районного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**2016-2017 навчальний рік**

**6 клас**

1. Десятковий запис добутку двох двоцифрових чисел складається винятково із четвірок. Знайдіть дані двоцифрові числа.

**Відповідь:** 12 і 37.

*Розв’язання.*

4444=44∙101 і не задовольняє умову (тому що 101 – просте число). Тоді вказаний добуток дорівнює 444=3∙4∙37. Єдина можлива комбінація двоцифрових співмножників 12 і 37.

1. Щоб пронумерувати сторінки великої наукової роботи, знадобилось 3389 цифр. Скільки сторінок у роботі?

**Відповідь:** 1124 сторінки.

*Розв’язання:*

Очевидно, що для нумерації перших 9 сторінок роботи (починаючи з 1-ої) знадобиться 9 цифр. Кожна наступна сторінка – з 10 по 99 включно – буде нумеруватися 2-ма цифрами. Загальна кількість таких сторінок становить 99-10+1=90. Тому для їх нумерації знадобиться ще 2∙90=180 цифр.

Кожна сторінка, починаючи з 100-ої буде нумеруватися 3-ма цифрами. Оскільки загальна кількість тризначних чисел становить 999-99 = 900, то для нумерації 900 сторінок з 100-ої по 999 знадобиться 3∙900 = 2700 цифр. Таким чином для нумерації перших 999 (9+90+900) сторінок знадобиться 9+180+2700=2889 цифр.

Решту 3389 - 2889 = 500 цифр було використано для нумерації сторінок, починаючи з 1000-ої. Оскільки для нумерації кожної такої сторінки використовується по 4 цифри, то занумеровано було 500 : 4 = 125 таких сторінок. Причому остання сторінка має номер 1124.

1. ДядькоІванкупивнаоптовомуринкупартіюручокі пропонуєпокупцям абооднуручкуза 5гривень, або три ручкиза 10гривень.Від кожногопокупцявінотримуєоднаковий прибуток.Якаоптовацінаручки?

**Відповідь:** 2 грн. 50 коп.

*Розв’язання:*

Якщо оптова ціна ручки – *x* гривень, то 5–*x*=10–3*x*, звідки *x*=2,5.

1. О 9 годині ранку зі станції А вирушив пасажирський поїзд, а слідом за ним об 11 годині з тієї ж станції вирушив швидкий поїзд. На якій відстані від станції А пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїзд, якщо швидкість пасажирського поїзда 54 км/год, а швидкого – 72 км/год?

**Відповідь:** 432 *км*.

*Розв’язання:*

Нехай *t* – час руху пасажирського поїзду до моменту, коли він повиненпропустити швидкий потяг. Тоді швидкий потяг до вказаної події рухався *t* -2

години. Оскільки на момент зазначеної події кожен з них подолав однаковувідстань, то має місце рівність 54∙*t* =72 (*t* –2).

Розв’яжемо одержане рівняння

54∙*t* =72 ∙(*t* –2); 54*t* =72*t* -144; 72*t* -54*t* =144; 18*t* =144; *t* =$\frac{144}{18}=8$.

Таким чином, пасажирський поїзд повинен пропустити швидкий поїздчерез 8 годин з моменту руху зі станції *A* о 9–ій годині ранку.

І тому за ці 8 годин пасажирський поїзд подолає відстань *S* =54 ∙ 8 =432 *км*.

Отже, на відстані 432 *км* від станції *A* , швидкий поїзд наздоженепасажирський.

1. Марія, Ліда, Оксана й Катя вміють грати на різних музичних інструментах: бандурі, арфі, акордеоні та скрипці, - але кожна тільки на одному. Вони також знають іноземні мови: англійську, французьку, німецьку, іспанську, - проте кожна лише одну. Відомо, що дівчина, яка грає на акордеоні, говорить іспанською. Ліда не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає англійської мови. Марія не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає ні німецької, ні англійської мови. Дівчина, котра говорить німецькою, грає на бандурі. Оксана знає французьку мову, але не грає на скрипці. Хто на якому інструменті грає та якою мовою розмовляє?

**Відповідь.** Марія – акордеон, іспанська; Ліда – бандура, німецька; Оксана – арфа, французька; Катя – скрипка, англійська.

**7 клас**

1. 12 учениць народилися в різні місяці одного року. Перемноживши номер місяця на число дня народження, дістали: Ольга – 49, Софія – 3, Марія – 52, Дарина – 130, Галина – 143, Наталка – 300, Надія – 14, Анна – 42, Віра – 81, Олена – 135, Тетяна – 128, Катерина – 153. Хто з дівчат народився в якому місяці?

**Відповідь***.* Софія – 1, Надія – 2, Віра – 3, Марія – 4, Олена – 5, Анна – 6, Ольга – 7, Тетяна – 8, Катерина – 9, Дарина – 10, Галина – 11, Наталка – 12 (число відповідає номеру місяця).

*Вказівка.* Ольга: 49=7·7, Софія: 3=3·1, Марія: 52=13·4, Дарина: 130 = 13·10, Галина: 143=13·11, Наталка: 300=25·12, Надія: 14=7·2, Анна: 42 =7· 6, Віра: 81= 27·3, Олена: 135=27·5, Тетяна: 128=8·16, Катерина: 153=17 · 9.

1. Чи можна від шматка мотузки довжиною $\frac{16}{31}$ м відрізати півметра, користуючись тільки складанням мотузки вдвоє? Відповідь обґрунтуйте.

**Відповідь***.* Так.

*Вказівка.* Щоб залишилося півметра, потрібно відрізати $\frac{1}{62}$ м. Але $\frac{1}{62}=\frac{1}{32}×\frac{16}{31},$тому для отримання відрізка довжиною 1/62 м даний шматок мотузки потрібно послідовно п’ять разів скласти вдвоє.

1. Чи можна в таблицю 50 $×$ 50 записати числа від 1 до 2500 так, щоб сума чисел в кожному рядку і кожному стовпці була непарною?

**Відповідь***.* Можна.

*Вказівка.*Розфарбуємо таблицю в кольори шахової дошки і впишемо в чорні клітини парні числа, а в білі – непарні. Тоді в кожному рядку і в кожному стовпці будуть по 25 парних чисел і по 25 непарних, і в кожному рядку і в кожному стовпці сума всіх 50 чисел буде непарною.

1. Знайти всі двоцифрові числа, які збільшуються у 8,5 разів, якщо між цифрами вписати 0.

**Відповідь***.* 12, 24,36,48*.*

*Вказівка.* , , , . Враховуючи, що  та , отримаємо, що .

**5.** Дмитрик з татом пішли у тир. Домовленість була такою: Дмитрик робить п’ять пострілів і за кожний влучний постріл отримує право зробити ще два постріли. Всього Дмитрик зробив 17 пострілів. Скільки разів він влучив у ціль?

**Відповідь***.* 6.

**8 клас**

1. Двозначне число в сумі з числом, записаним тими ж цифрами, але в зворотному порядку, дає повний квадрат. Знайдіть всі такі числа.

**Відповідь***.*29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

*Вказівка.*. Але , тому $(a+b)\vdots 11$, а значить, .

1. У садку ростуть 18 яблунь. На всіх них порівну яблук. Подув вітер, і з деяких яблунь посипалися яблука: з деяких – рівно половина, з деяких – рівно третина, а з решти – жодного яблука. При цьому з усіх яблунь разом упало рівно  частина всіх яблук. Із скількох яблунь яблука не падали?

**Відповідь***.* 13 яблунь.

*Вказівка.* Нехай *n* – кількість яблунь, з яких обсипалась рівно половина яблук, *m* – кількість яблунь, з яких обсипалась рівно третина яблук, тоді 18–*n*–*m* – шукана кількість яблунь. Якщо *k* – кількість яблук на одній яблуні, то з умови задачі одержуємо рівність  Звідси , де *n* і *m* – натуральні числа. Звідси *m* = 3, а *n* = 2.

1. Знайдіть у натуральних числах всі корені рівняння

 НСК (*a*, *b*) = НСД (*a*, *b*) + 10, де *a* ≤ *b*.

**Відповідь.**(1; 11), (2; 12), (4, 6), (5; 15), (10; 20).

*Вказівка.*Нехай *a* = *dc*, *b* = *de*, де *с* і *е* – взаємно прості числа.

Тоді *dce* = *d* + 10, тобто *d* може дорівнювати 1, 2, 5 і 10.

Якщо *d* = 1, то *с* = 1, *е* = 11. Якщо *d* = 2, то *се* = 6, *с* = 1, *е* = 6 і *с* = 2, *е* = 3. Якщо *d* = 5, то *се* = 3, *с* = 1, *е* = 3. Якщо *d* = 10, то *се* = 2, *с* = 1, *е* = 2.

**4.** Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 120º. З середини основи трикутника опущено перпендикуляр на бічну сторону. У якому відношенні основа перпендикуляра ділить бічну сторону?

**Відповідь:** 3 : 1, рахуючи від вершини основи.

*Вказівка.* Нехай у трикутнику *АВС АВ* = *АС*. *М* – середина *ВС*. *Р* – основа перпендикуляра на *ВС*. *АМ* = 0,5*АВ*, *АР* = 0,5*АМ*.

**5.** Кожна клітинка таблиці $×$ зафарбована в один з  кольорів. За кожен хід дозволяється всі клітини будь-якого рядка чи стовпця перефарбувати в деякий колір, якщо в цьому рядку (стовпці) є не менш, ніж дві клітинки такого кольору. Чи можна за декілька ходів перефарбувати таблицю в один колір?

**Відповідь:** так, можна.

*Вказівка.*У кожному рядку таблиці знайдуться не менше, ніж дві клітинки одного кольору, оскільки в рядку  клітинок, а кольорів . Перефарбуємо всі клітинки цього рядка в один цей колір. Так само вчинимо з усіма рядками таблиці. Тоді дістанемо таблицю, в якій всі рядки однокольорові, тобто зафарбовані в  кольорів, де . Тому знайдуться не менш, ніж два рядки пофарбовані одним кольором. А це означає, що в кожному стовпці є не менше, ніж дві клітинки, пофарбовані в один колір. Нехай це синій колір, це дозволяє всі стовпці перефарбувати в синій колір. Після таких перефарбувань всі клітинки таблиці будуть синього кольору.

**9 клас**

1. Знайдіть всі пари цілих чисел *х* і *у*, які задовольняють системі нерівностей: 

**Відповідь:** (– 6; 6), (– 7; 7).

*Вказівка.*Запишемо перше рівняння системи у такому вигляді:. Звідки  і  в цілих числах можуть приймати значення 0 або 1. Розв’язуючи відповідні системи рівнянь і виконуючи перевірку другої нерівності, одержимо такі розв’язки: (– 6; 6), (– 7; 7).

1. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел *a*, *b* виконується нерівність



*Вказівка.*.

1. Бісектриси двох кутів чотирикутника, вписаного у коло, паралельні. Доведіть, що сума квадратів двох сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін.

*Вказівка*. У чотирикутнику *АВСd*∠*В* = ∠*d*. Оскільки чотирикутник вписаний, ці кути – прямі.

1. Доведіть, що () $\vdots $ 630.

*Вказівка*.=126∙125∙(1261024-…-1) $\vdots $ 630.

1. На дошці записано 10 одиниць та 10 двійок. За один хід дозволяється стирати будь-які дві цифри і, якщо вони були однаковими, записати двійку, а якщо різними – одиницю. Якщо остання цифра, що залишається на дошці, - одиниця, то виграє перший гравець, якщо ж двійка, то другий. У кого з гравців виграшна стратегія?

**Відповідь**: У другого.

*Вказівка.* Після кожного ходу кількість одиниць або не змінюється, або зменшується на 2. Оскільки спочатку було парне число одиниць, то одиниця залишитись не може.

**10 клас**

1. Розв’яжіть рівняння .

**Відповідь:** (0; 0).

*Вказівка.*.

1. Дотична в точці *А* до кола,описаного навколотрикутника *АВС,* перетинає продовження сторони *ВС* за точку *В* у точці *К*. Точка *L* – середина *АС*, а точка *М* на відрізку *АВ* така, що ∠*АКМ* =∠*СКL*. Доведіть, що *LМ* і *ВС* паралельні.

*Вказівка.*Трикутники *САК* і *АВК* подібні, оскільки ∠*К* у них спільний і ∠*КСА*=∠*КАВ* як вписаний кут, що спирається на дугу *А*В, і кут між хордою *АВ* і дотичною. Оскільки ∠*АКМ* =∠*СКL*, то відрізки *КL* і *КМ* – відповідні елементи в трикутниках *САК* і *АВС*. При цьому *КL* – медіана. *КМ* – також медіана і *МА*=*МВ*.

1. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел *a*, *b*, *с*виконується нерівність .

*Вказівка.* , .

1. Побудуйте множину усіх точок площини, які задовольняють нерівність: .



1. Знайдіть трицифрове число, квадрат якого дорівнює п’ятому степеню суми його цифр.

**Відповідь***.* 243.

*Вказівка.*Позначимо шукане число через . Оскільки  – трицифрове число, то його можна записати у вигляді . За умовою задачі . Звідси . З цієї рівності випливає: якщо таке число  існує, то сума його цифр  повинна бути повним квадратом деякого цілого числа. Через те, що  – трицифрове число, то справджуються такі нерівності:  Тоді . Оскільки  є повним квадратом цілого числа і між числами 5 і 16 таким є тільки число , то 

**11 клас**

**1.** У трикутнику *АВСАМ* – медіана. На *АС* вибрано точки *Р* і *Е* такі, що *ВР* і *ВЕ* поділяють медіану *Ам* на три рівні частини. Знайдіть площу трикутника *ВРЕ*, якщо площа трикутника *АВС* дорівнює 8 см2.

**Відповідь.**2,4 см2.

*Вказівка. ВЕ* – медіана трикутника *АВС*, тоді площа трикутника *АВЕ* дорівнює 4 см2. *РС* = 4*АР*.

**2.** Побудуйте множину усіх точок площини, які задовольняють рівняння:

.

**Відповідь***.*

*Вказівка.* Прямі , *n* і *m* – цілі числа.

**3.** Розв’яжітьрівняння: .

**Відповідь**:4; 5,5.

*Вказівка.*Перепишемо данерівняння у вигляді . Оскільки , то . Тому або . Всі значення *х,* при яких , є розв’язками нерівності . При цьому , .

Якщо , то . Отже,  При цьому , .

**4.** Знайдіть , якщо для будь-якого *х*≠ 0 виконується рівність .

**Відповідь.**.

*Вказівка.*, . Звідси ,

, .

**5.** Знайдіть трицифрове число, квадрат якого дорівнює п’ятому степеню суми його цифр.

**Відповідь***.* 243.

*Вказівка.*Позначимо шукане число через  Оскільки  – трицифрове число, то його можна записати у вигляді . За умовою задачі . Звідси . З цієї рівності випливає: якщо таке число  існує, то сума його цифр  повинна бути повним квадратом деякого цілого числа. Через те, що  – трицифрове число, то справджуються такі нерівності:  Тоді . Оскільки  є повним квадратом цілого числа і між числами 5 і 16 таким є тільки число , то 